مقدمهٔ مؤلّفان

در ابتدا و قبل از هر کلام، از خداوند مهربان سپاس‌گزاریم که ما را یاری کرد تا از علم اندک خود بهره بگیریم و توانمان را در جهت خدمت به دانش‌آموزان دوست‌داشتنی و پرتلاش سرزمین عزیزمان صرف کنیم.

نتیجهٔ این تلاش، کتاب حاضر است. کتاب «بانک نهایی ریاضی ۱» که با رویکرد جدید نسبت به امتحانات نهایی و ارزش‌یابی مفهومی و سنجش قدرتِ تحلیل و استنباط دانش‌آموزان، تألیف شده است.

امیدواریم، پس از مطالعهٔ درس‌نامه و حل سؤالات متنوع این کتاب، لذت‌بردن شما از درس ریاضی چندین برابر شود و در نتیجهٔ آن با اعتماد به نفس واقعی، فقط به نمرهٔ بیست فکر کنید!

بعضی از ویژگی‌های این کتاب عبارت‌اند از:

۱ پوشش کامل فعالیت‌ها، مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی

۲ درس‌نامهٔ مختصر اما بسیار مفید، کامل و قابل درک همراه با مثال

۳ پاسخ‌های کاملاً تشریحی و مطابق با راه حل‌های کتاب درسی

۴ طراحی سؤالات به سبک نهایی و کمی سطح بالاتر برای آمادگی بیشتر شما

۵ چیدمان سؤالات به ترتیب از ساده به دشوار برای تسلط بیشتر

۶ ارائهٔ چند دوره امتحان شبیه‌ساز نهایی به همراه پاسخ کامل و توضیحات لازم

۷ ارائهٔ بارم‌بندی برای هر فصل و ریزبارم در پاسخ‌نامهٔ امتحانات

این ویژگی‌های خوب و منحصر به فرد نتیجهٔ کار با یک تیم توانمند است.

بنابراین تشکر و قدردانی می‌کنم از:

- جناب آقای کمیل نصری، مدیر محترم مجموعهٔ خیلی‌سبز
- جناب آقای احمد علی‌نژاد، مدیر تألیف پرتوان و مستعد انتشارات

مؤلفان

فهرست مطالب

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس ۱ ریشه و توان

صفحهٔ ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ را در صفحهٔ ۷۱ ببینید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۲۳۹- هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ زوج است که قرینهٔ یکدیگرند.

۲۴۰- چون $\pm ۴ = \sqrt{۱۶}$، پس ± ۴ ریشه‌های دوم ۱۶ هستند.

۲۴۱- اگر $\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۳]{a}$ باشد، آن‌گاه لزوماً $۰ < a < ۱$.

۲۴۲- اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۳]{a}$.

۲۴۳- اگر a عددی منفی و $a > \sqrt[۳]{a}$ باشد، آن‌گاه $-۱ < a < ۰$.

۲۴۴- ریشهٔ nاُم عدد صفر برابر صفر است.

۲۴۵- ریشهٔ چهارم عدد ۱ برابر ۱ است.

۲۴۶- اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۲۴۷- هر عدد مثبت دارای .... ریشهٔ ششم است که .... یکدیگرند.

۲۴۸- هر عدد مثبت یا منفی دارای .... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد ریشهٔ پنجم آن .... و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ پنجم آن .... است.

۲۴۹- اگر $a > ۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد حاصل .... می‌شود.

۲۵۰- اگر a عددی مثبت و $a > \sqrt[۵]{a}$ باشد، آن‌گاه ....

۲۵۱- اگر a عددی منفی و $a > \sqrt[۵]{a}$ باشد، آن‌گاه ....

۲۵۲- اعداد ۲ و .... ریشه‌های ششم عدد .... می‌باشند.

۲۵۳- اگر $a = \sqrt[۳]{۶۴}$، در این صورت حاصل $a^۲ + \sqrt{a}$ برابر است با ....

۲۵۴- حاصل $-\sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶}$ برابر است با ....

نظیر هر تساوی توانی، یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی، یک تساوی توانی بنویسید.

۲۵۵- $(-۵)^۳ = -۱۲۵$

۲۵۶- $(۰/۶)^۲ = ۰/۳۶$

۲۵۷- $۳^۶ = ۷۲۹$

۲۵۸- $\sqrt{۱۶۹} = ۱۳$

۲۵۹- $\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$

۲۶۰- $\sqrt[۳]{-۷۲} = -۲\sqrt[۳]{۹}$

در هر مورد، مشخص کنید هر ریشه، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ (مشابه تمرین و کار در کلاس کتاب درسی)

۲۶۱- $\sqrt{۱۳}$

۲۶۲- $\sqrt{۵۷}$

۲۶۳- $-\sqrt{۳۰}$

۲۶۴- $\sqrt[۳]{-۱۹}$

۲۶۵- $\sqrt[۳]{۱۰۰}$

۲۶۶- $\sqrt[۴]{۱۴۵}$

۲۶۷- $\sqrt[۵]{۲۰۱}$

۲۶۸- $\sqrt[۵]{-۵۰۰}$

در هر مورد مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.

۲۶۹- ریشه‌های دوم ۱۶

۲۷۰- ریشه‌های چهارم ۶۲۵

۲۷۱- ریشهٔ سوم ۱۲۵

۲۷۲- ریشهٔ سوم ۶۴

۲۷۳- ریشه‌های ششم ۰/۰۰۰۰۰۱

۲۷۴- ریشه‌های دوم ۳۶-

۲۷۵- ریشه‌های چهارم ۷۰

۲۷۶- ریشهٔ سوم ۵۰−

۲۷۷- ریشهٔ پنجم ۰/۰۰۰۳۲−

۲۷۸- ریشهٔ هفتم $-\frac{۱}{۱۲۸}$

■ در هر مورد، حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

۲۷۹- $\sqrt{۳/۶۱}$

۲۸۰- $\sqrt[۳]{۳۴۳}$

۲۸۱- $\sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶}$

۲۸۲- $\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۱۰۲۴}}$

۲۸۳- $\sqrt[۶]{\frac{۶۴}{۷۲۹}}$

۲۸۴- $\sqrt[۷]{-۱۲۸}$

۲۸۵- $\sqrt[۷]{-۱}$

۲۸۶- $\sqrt[۸]{۰}$

■ در هر مورد، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست آورید.

۲۸۷- $\sqrt[۴]{۱۶} = a \Rightarrow a^{۳} + ۱ = ?$

۲۸۸- $\sqrt[۳]{۷} = a \Rightarrow a^{۳} + ۳ = ?$

۲۸۹- $\sqrt[۵]{۴} = a \Rightarrow a^{۱۰} - ۵ = ?$

۲۹۰- $\sqrt[۶]{a} = ۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{-a} = ?$

۲۹۱- سه مکعب تودرتو را در نظر بگیرید به طوری که حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۲۱۶ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۱۲۵ است. طول ضلع مکعب میانی را به صورت یک بازه نمایش دهید. **(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)**

■ در هر مورد تعیین کنید به جای x کدام اعداد طبیعی را می‌توان قرار داد.

۲۹۲- $۶ < \sqrt{x} < ۷$

۲۹۳- $۴ \leq \sqrt[۳]{x} < ۵$

۲۹۴- $۲ \leq \sqrt[۴]{x} \leq ۳$

۲۹۵- اگر $۰ < a < ۱$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید. **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

الف) $a^{۴} \;\square\; a^{۵}$

ب) $\sqrt{a} \;\square\; \sqrt[۳]{a}$

۲۹۶- اگر $a > ۱$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید. **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

الف) $a^{۳} \;\square\; a^{۴}$

ب) $\sqrt[۶]{a} \;\square\; \sqrt[۵]{a}$

۲۹۷- اگر $-۱ < a < ۰$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

الف) $a^{۵} \;\square\; a^{۷}$

ب) $a^{۴} \;\square\; a^{۶}$

پ) $a^{۳} \;\square\; a^{۴}$

ت) $\sqrt[۳]{a} \;\square\; \sqrt[۵]{a}$

۲۹۸- اگر $a < -۱$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

الف) $a^{۳} \;\square\; a^{۵}$

ب) $\sqrt[۵]{a} \;\square\; \sqrt[۷]{a}$

پ) $a^{۲} \;\square\; a^{۴}$

ت) $a^{۷} \;\square\; a^{۴}$

■ در هر مورد، یکی از علامت‌های «<»، «>» یا «=» را در جای خالی قرار دهید.

۲۹۹- $۱۱^{۵} \;\square\; ۱۱^{۸}$

۳۰۰- $(۰/۲)^{۴} \;\square\; (۰/۲)^{۷}$

۳۰۱- $(-۰/۱)^{۷} \;\square\; (-۰/۱)^{۹}$

۳۰۲- $(-۳)^{۳} \;\square\; (-۳)^{۵}$

۳۰۳- $(-۱۲)^{۴} \;\square\; (-۱۲)^{۶}$

۳۰۴- $\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} \;\square\; ۰/۱$

۳۰۵- $\sqrt[۵]{۷} \;\square\; \sqrt[۹]{۷}$

۳۰۶- $\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}} \;\square\; \sqrt[۶]{\frac{۲}{۳}}$

۳۰۷- $\sqrt[۳]{-۰/۳} \;\square\; \sqrt[۵]{-۰/۳}$

۳۰۸- $\sqrt[۵]{-۹} \;\square\; \sqrt[۹]{-۹}$

■ در هر مورد مشخص کنید a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

۳۰۹- a عددی مثبت است و $\sqrt[۳]{a} > a$.

۳۱۰- a عددی حقیقی است و $\sqrt[۵]{a} < a$.

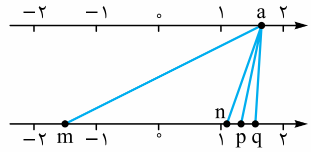
۳۱۱- a عددی منفی است و $\sqrt[۷]{a} > a$.

۳۱۲- a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[۳]{a} = a$.

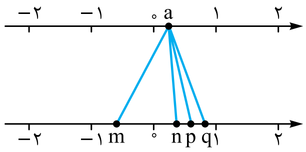
۳۱۳- a عددی مثبت است که $a > \sqrt{a}$.

■ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید نقاط m، n، p و q مربوط به کدام ریشه است؟

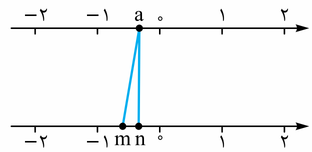
-۳۱۴



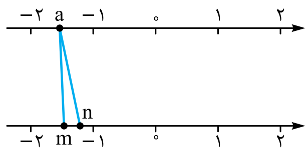
-۳۱۵



-۳۱۶



-۳۱۷



-۳۱۸ ریشهٔ پنجم عددی از ریشهٔ سوم عدد ۶۴-، ۶ واحد بزرگ‌تر است. آن عدد را به دست آورید.

درس ۲ ریشهٔ nاُم

صفحهٔ ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ را در صفحهٔ ۷۵ ببینید.

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

-۳۱۹ به ازای هر عدد حقیقی a و b رابطهٔ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ برقرار است.

-۳۲۰ رابطهٔ $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$ به ازای هر عدد طبیعی فرد n $(n>۲)$ برقرار است.

-۳۲۱ همواره داریم $\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{a})^m$.

-۳۲۲ اگر رادیکال‌ها بامعنی باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$.

-۳۲۳ می‌توان نوشت: $\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{۴})-۳)^۲}=\sin(\frac{\pi}{۴})-۳$.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

-۳۲۴ حاصل $\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۲}$ برابر .... است.

-۳۲۵ رابطهٔ $(\sqrt[n]{a^n})=(\sqrt[n]{a})^n$ وقتی برقرار نیست که ....

-۳۲۶ اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر است با ....

-۳۲۷ حاصل $\sqrt[۴]{(۶۴)^{-۲}}$ برابر است با ....

■ در هر مورد به جای a و b و عدد طبیعی n، عددهایی قرار دهید که احکام داده‌شده برقرار باشد.

-۳۲۸ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$

-۳۲۹ $\sqrt[n]{ab}\neq\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$

-۳۳۰ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

-۳۳۱ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\neq\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (همهٔ رادیکال‌ها بامعنی‌اند.)

-۳۳۲ $\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۷}$

-۳۳۳ $\sqrt[۵]{۲۵۶}\times\sqrt[۵]{۴}$

-۳۳۴ $\frac{\sqrt[۴]{۵۱۲}}{\sqrt[۴]{۱۶۲}}$

-۳۳۵ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲۴}}\times\sqrt[۳]{۸۱}$

-۳۳۶ $\sqrt[۳]{\frac{۵}{۱۶}}\div\sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}}$

-۳۳۷ $\sqrt[۵]{\frac{b^۲}{۳ac}}\times\sqrt[۵]{۸۱a^۶b}\times\sqrt[۵]{۹b^۲c}$

-۳۳۸ $۲\sqrt[۴]{۳۷۵}\times۵\sqrt[۴]{۱۳۵}$

-۳۳۹ $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶a^۲b^۴}}\times\sqrt[۳]{۵۴a^۵b}$

■ در هر مورد عبارت داده‌شده را ساده کنید. (همهٔ رادیکال‌ها بامعنی‌اند.)

۳۴۰- $\sqrt{242}$

۳۴۱- $\sqrt[3]{16a^4b^5c^6}$

۳۴۲- $\sqrt{72}-3\sqrt{18}+2\sqrt{8}$

۳۴۳- $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{192}$

۳۴۴- با فرض $k\in\mathbb{N}$ ، $k\geq 2$ ، $m\in\mathbb{Z}$ و $a\in\mathbb{R}$ ، بررسی کنید رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{a})^m$ در چه صورت برقرار است. (تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

۳۴۵- $\sqrt[3]{(64)^2}$

۳۴۶- $\sqrt[7]{(128)^{-3}}$

۳۴۷- $\sqrt[6]{(729)^5}$

۳۴۸- $\sqrt[4]{(-625)^2}$

۳۴۹- تساوی $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$ به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟ (کار در کلاس کتاب درسی)

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

۳۵۰- $\sqrt{(-3)^2}$

۳۵۱- $\sqrt[3]{(-7)^3}$

۳۵۲- $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

۳۵۳- $\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^4}$

۳۵۴- $\sqrt[6]{(x^2+1)^6}$

۳۵۵- $\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^{10}}-\sqrt[5]{(\sqrt{2}-6)^5}$

۳۵۶- عددهای زیر را محاسبه کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $\sqrt[3]{7^{-3}}$
ب) $\sqrt[5]{3^{-5}}$
پ) $\sqrt[4]{5^{-4}}$
ت) $\sqrt[6]{\dfrac{5^{-6}}{3^{-12}}}$

۳۵۷- اگر $x<0$ باشد، حاصل $A=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[5]{x^5}$ را به دست آورید.

۳۵۸- اگر $0<x<1$ باشد، حاصل $A=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$ را به دست آورید.

۳۵۹- مشخص کنید رابطهٔ $\sqrt[4]{(x-1)^4}=(\sqrt[4]{1-x})^4$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است.

۳۶۰- تعیین کنید، تحت چه شرایطی رابطهٔ $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$ برقرار است.

۳۶۱- حدود x را طوری بیابید که رابطهٔ $\sqrt[n]{(2x-1)^n}=(\sqrt[n]{2x-1})^n$ به ازای هر عدد طبیعی n $(n\geq 2)$ برقرار باشد.

۳۶۲- اگر $b<0<a$ باشد، عبارت $A=\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2}}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۳۶۳- با استفاده از تعریف ریشه، به شرط بامعنی‌بودن رادیکال، ثابت کنید $(\sqrt[n]{a})^n=a$. (تمرین کتاب درسی)

درس ۳ توان‌های گویا

صفحهٔ ۵۹ تا ۶۱ کتاب درسی

درسنامهٔ ۳ را در صفحهٔ ۷۸ ببینید.

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۳۶۴- $(-1)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{-1}$

۳۶۵- رابطهٔ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است.

۳۶۶- $\sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$

۳۶۷- $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{10}$

۳۶۸- $\sqrt{3}=\sqrt[4]{9}=\sqrt[6]{27}$

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

۳۶۹- حاصل $81^{\frac{3}{4}}$ برابر است با ....

۳۷۰- اگر حاصل $2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2}{3}}$ برابر $a\sqrt[6]{2}$ باشد، a برابر است با ....

۳۷۱- اگر m و n دو عدد طبیعی و $a>0$، آن‌گاه ...... $=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

$$\cos\alpha=\pm\frac{۸}{۱۰}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم}}\cos\alpha=-\frac{۸}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{۶}{۱۰}}{-\frac{۸}{۱۰}}=\dfrac{۶}{۸}=\dfrac{۳}{۴}\\[2ex]\cot\alpha=\dfrac{۱}{\tan\alpha}=\dfrac{۴}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\tan\alpha}+\cot^{۲}\alpha=\sqrt{\frac{۳}{۴}}+\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۹\sqrt{۳}+۳۲}{۱۸}$$

۲۳۷. در ناحیهٔ دوم مثلثاتی، سینوس زوایا مثبت و کسینوس و تانژانت و کتانژانت منفی است؛ پس:

$$\sin\alpha=+\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\left(-\frac{۳}{۵}\right)^{۲}}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha+\frac{۱}{\sin\alpha}=-\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{\frac{۴}{۵}}=-\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۴}=\frac{-۱}{۱۲}$$

۲۳۸. $\cot^{۲}\alpha+\tan^{۲}\alpha=۲۳$

$$\Rightarrow\underbrace{\cot^{۲}\alpha+\tan^{۲}\alpha+۲\cot\alpha\tan\alpha}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}-۲\overbrace{\cot\alpha\tan\alpha}^{۱}=۲۳$$

$$\Rightarrow(\cot\alpha+\tan\alpha)^{۲}-۲=۲۳\Rightarrow(\cot\alpha+\tan\alpha)^{۲}=۲۵$$

$$\Rightarrow\cot\alpha+\tan\alpha=\pm۵$$

در ناحیهٔ سوم مثلثاتی $\cot\alpha$ و $\tan\alpha$ هر دو مثبت هستند؛ پس:

$$\cot\alpha+\tan\alpha=۵$$

$$\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=۵\Rightarrow\frac{\overbrace{\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha}^{۱}}{\sin\alpha.\cos\alpha}=۵$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۵}\quad(*)$$

اگر مقدار خواسته‌شدهٔ $\sin\alpha+\cos\alpha$ را برابر A قرار دهیم:

$$A=\sin\alpha+\cos\alpha\Rightarrow A^{۲}=(\sin\alpha+\cos\alpha)^{۲}$$

$$=\underbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}_{۱}+۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow A^{۲}=۱+۲\sin\alpha\cos\alpha\xrightarrow{(*)}A^{۲}=۱+۲\left(\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۷}{۵}$$

$$\Rightarrow A=\pm\sqrt{\frac{۷}{۵}}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{۷}{۵}}$$

چون در ربع سوم، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو منفی هستند، پس حاصل‌جمع به‌دست‌آمده نیز باید منفی باشد؛ بنابراین

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{\frac{۷}{۵}}$$

فصل ۳ درس ۱

ریشه‌وتوان

صفحهٔ ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

ریشه

۱) **ریشه‌های دوم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی مثبت باشد، چون $(\pm\sqrt{b})^{۲}=b$، به اعداد $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ ریشه‌های دوم عدد b می‌گوییم.

به طور مثال ریشه‌های دوم عدد ۲۵، عبارت‌اند از $\pm\sqrt{۲۵}=\pm۵$ و ریشه‌های دوم عدد ۶۰ عبارت‌اند از $\pm\sqrt{۶۰}$.

نکته ۱ هر عدد مثبت دو ریشهٔ دوم دارد که قرینهٔ یکدیگرند.

۲ اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند. مثلاً عدد ۱۶− ریشهٔ دوم ندارد.

۳ ریشه‌های دوم عدد ۱ برابر ۱± و ریشهٔ دوم صفر برابر صفر است.

۲) **ریشهٔ سوم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی باشد، چون $(\sqrt[۳]{b})^{۳}=b$، به عدد $\sqrt[۳]{b}$ ریشهٔ سوم عدد b می‌گوییم. به طور مثال؛ ریشهٔ سوم عدد ۸ برابر $\sqrt[۳]{۸}=۲$ و ریشهٔ سوم عدد ۲۷ برابر $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ و ریشهٔ سوم عدد ۵۷ برابر $\sqrt[۳]{۵۷}$ است.

نکته هر عدد حقیقی چه مثبت، چه منفی و چه صفر، دقیقاً یک ریشهٔ سوم هم‌علامت با خود عدد دارد.

تذکر اگر عدد $a>۰$ مربع کامل و عدد b نیز مکعب کامل نباشند، آن‌گاه $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{b}$، اعداد حقیقی گنگ هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به طور مثال $\sqrt[۳]{۱۵}$ که برای نمایش ریشهٔ سوم عدد ۱۵ به کار می‌رود را نمی‌توان به طور دقیق با ارقام اعشاری نمایش داد و لذا از تقریبات آن در دنیای واقع استفاده می‌شود.

مثال **مشخص کنید اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح واقع هستند.**

الف) $\sqrt{۵۷}$ **ب)** $\sqrt[۳]{-۲۳}$

پاسخ: الف) داریم $۶۴>۵۷>۴۹$، در نتیجه با جذرگیری از طرفین این نامعادله خواهیم داشت: $۷<\sqrt{۵۷}<۸$

پس عدد $\sqrt{۵۷}$ بین دو عدد صحیح ۷ و ۸ قرار دارد.

ب) می‌دانیم $-۸>-۲۳>-۲۷$، اگر از طرفین این نامعادله، ریشهٔ سوم بگیریم، داریم:

$$\sqrt[۳]{-۲۷}<\sqrt[۳]{-۲۳}<\sqrt[۳]{-۸}\Rightarrow-۳<\sqrt[۳]{-۲۳}<-۲$$

یعنی عدد $\sqrt[۳]{-۲۳}$ بین دو عدد صحیح ۳− و ۲− واقع است.

۳) **ریشه‌های چهارم:** فرض کنیم b عدد حقیقی مثبت باشد، چون $(\pm\sqrt[۴]{b})^{۴}=b$، به اعداد $\sqrt[۴]{b}$ و $-\sqrt[۴]{b}$، ریشه‌های چهارم عدد b می‌گوییم. به طور مثال، ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر $\pm\sqrt[۴]{۱۶}=\pm۲$، ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ برابر $\pm\sqrt[۴]{۸۱}=\pm۳$ و ریشه‌های چهارم عدد ۲۷ برابر $\pm\sqrt[۴]{۲۷}$ هستند.

نکته ۱ هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ چهارم است که قرینهٔ یکدیگرند.

۲ اعداد منفی، ریشهٔ چهارم ندارند.

۳ ریشهٔ چهارم صفر برابر صفر است.

۴) **ریشهٔ پنجم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی دلخواه باشد، چون $(\sqrt[۵]{b})^۵ = b$، به عدد $\sqrt[۵]{b}$ ریشهٔ پنجم b می‌گوییم. به طور مثال ریشهٔ پنجم عدد ۳۲ برابر $\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$ و ریشهٔ پنجم عدد ۷۰− برابر $\sqrt[۵]{-۷۰}$ است.

نکته هر عدد حقیقی (چه مثبت، چه منفی و چه صفر) دقیقاً یک ریشهٔ پنجم دارد که هم‌علامت با خود عدد است.

۵) **ریشهٔ nاُم:** اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می‌گوییم هرگاه $b^n = a$.

تذکر اگر n زوج باشد، ریشه‌های nاُم یک عدد مانند ریشه‌های دوم و چهارم و چنان‌چه n فرد باشد، ریشهٔ nاُم یک عدد مانند ریشهٔ سوم و پنجم تعریف می‌شود. به طور مثال ریشه‌های هشتم عدد ۲۵۶ برابر $\pm\sqrt[۸]{۲۵۶} = \pm ۲$ و ریشهٔ هفتم عدد ۷۳ برابر $\sqrt[۷]{۷۳}$ است.

بحث در وجود و تعداد ریشه‌های یک عدد

$a > ۰$
- n زوج ← a دارای دو ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.
- n فرد ← a دارای یک ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$ است.

$a > ۰$
- n زوج ← a ریشهٔ nاُم ندارد.
- n فرد ← a دارای یک ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$ است.

تذکر ریشهٔ nاُم عدد صفر، صفر است.

مثال مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.

الف) ریشه‌های ششم عدد ۷۲۹ ب) ریشهٔ هفتم عدد $-\frac{۱}{۱۲۸}$

پ) ریشه‌های هشتم عدد ۶۴−

پاسخ:

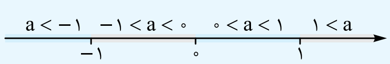
الف) عدد ۷۲۹ مثبت است، پس دو ریشهٔ ششم دارد که قرینهٔ یکدیگرند و عبارت‌اند از:
$$\pm\sqrt[۶]{۷۲۹} = \pm\sqrt[۶]{۳^۶} = \pm ۳$$

ب) می‌دانیم هر عدد حقیقی فقط یک ریشهٔ هفتم دارد؛ پس عدد $-\frac{۱}{۱۲۸}$ نیز یک ریشهٔ هفتم دارد که عبارت است از:
$$\sqrt[۷]{-\frac{۱}{۱۲۸}} = \sqrt[۷]{-\frac{۱}{۲^۷}} = -\frac{۱}{۲}$$

پ) می‌دانیم اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند پس عدد ۶۴− دارای ریشهٔ هشتم نیست.

مقایسهٔ توان‌ها و ریشه‌های مختلف یک عدد

مطابق شکل، اعداد ۱، صفر و ۱− محور اعداد حقیقی را به ۴ قسمت (بازه) تقسیم می‌کنند که ویژگی‌های هر یک از این ۴ قسمت در زیر آمده است:



۱) $a > ۱$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a > ۱ \Rightarrow \cdots > a^۳ > a^۲ > a > \sqrt{a} > \sqrt[۳]{a} > \cdots$$

۲) $۰ < a < ۱$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow \cdots < a^۳ < a^۲ < a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \cdots$$

۳) $-۱ < a < ۰$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $a > ۱$، عمل می‌کند. در این حالت a ریشهٔ زوج ندارد و داریم:

$$-۱ < a < ۰ \Rightarrow \cdots > a^۵ > a^۳ > a > \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۵]{a} > \cdots$$

$$-۱ < a < ۰ \Rightarrow a^۲ > a^۴ > a^۶ > \cdots$$

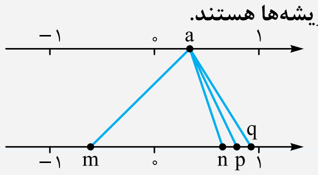
۴) $a < -۱$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $۰ < a < ۱$، عمل می‌کند. در این حالت a ریشهٔ زوج ندارد و داریم:

$$a < -۱ \Rightarrow \cdots < a^۵ < a^۳ < a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a} < \cdots$$

$$a < -۱ \Rightarrow a^۲ < a^۴ < a^۶ < \cdots$$

تذکر اگر $a = ۰$ یا $a = ۱$، آن‌گاه:
$$\cdots = a^۳ = a^۲ = a = \sqrt{a} = \sqrt[۳]{a} = \cdots$$
هم‌چنین اگر $a = -۱$، آن‌گاه:
$$\cdots = a^۵ = a^۳ = a = \sqrt[۳]{a} = \sqrt[۵]{a} = \cdots = -۱$$
و $a^۲ = a^۴ = a^۶ = \cdots = ۱$

مثال در شکل زیر، عدد a روی محور بالا به ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم خود در محور پایین رسم شده است. تعیین کنید اعداد **m، n، p و q** مربوط به کدام‌یک از این ریشه‌ها هستند.



پاسخ: با توجه به شکل، معلوم می‌شود که $۰ < a < ۱$ است؛ پس بنابر مطالب گفته‌شده با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. یعنی رابطهٔ ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم عبارت‌اند از:
$$\sqrt[۵]{a} < \sqrt[۶]{a} < \sqrt[۷]{a}$$
پس می‌توان نوشت:
$$n = \sqrt[۵]{a}, p = \sqrt[۶]{a}, q = \sqrt[۷]{a}$$
اما چون عدد a دارای دو ریشهٔ ششم قرینه است، پس $m = -\sqrt[۶]{a}$.

پاسخ سؤالات

۲۳۹. درست

۲۴۰. نادرست؛ زیرا همواره داریم $\sqrt{۱۶} = ۴$ و حاصل $\sqrt{۱۶}$ هرگز برابر ۴− نیست. در واقع باید گفته می‌شد، چون $(\pm ۴)^۲ = ۱۶$، پس ریشه‌های دوم ۱۶ برابر ± ۴ است.

۲۴۱. نادرست؛ علاوه بر این‌که $۰ < a < ۱$ می‌تواند باشد، اگر $a < -۱$ باشد، باز هم $\sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a}$ خواهد بود.

۲۴۲. درست

۲۴۳. نادرست؛ زیرا با شرایط داده‌شده، لازم است $a<-۱$ باشد.

۲۴۴. درست

۲۴۵. نادرست؛ زیرا ریشه‌های چهارم عدد ۱، ±۱ هستند.

۲۴۶. درست

۲۴۷. دو ـ قرینهٔ

۲۴۸. یک ـ مثبت ـ منفی

۲۴۹. کوچک

۲۵۰. $۰<a<۱$

۲۵۱. $a<-۱$

۲۵۲. -۲ ، ۶۴

۲۵۳. ۱۸؛ زیرا: $\sqrt[۳]{۶۴}=۴$، پس $a=۴$ و درنتیجه $a^۲+\sqrt{a}=۱۶+۲=۱۸$

۲۵۴. $-۰/۲$؛ زیرا:

$$-\sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶}=-\sqrt[۴]{\frac{۱۶}{۱۰۰۰۰}}=-\sqrt[۴]{(\frac{۲}{۱۰})^۴}=-\frac{۲}{۱۰}=-۰/۲$$

۲۵۵.

$$(-۵)^۳=-۱۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$$

۲۵۶.

$$(۰/۶)^۲=۰/۳۶ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۳۶}=۰/۶$$

۲۵۷.

$$۳^۶=۷۲۹ \Leftrightarrow \sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$$

۲۵۸.

$$\sqrt{۱۶۹}=۱۳ \Leftrightarrow ۱۳^۲=۱۶۹$$

۲۵۹.

$$\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow (۵\sqrt{۲})^۲=۵۰$$

۲۶۰.

$$\sqrt[۳]{-۷۲}=-۲\sqrt[۳]{۹} \Leftrightarrow (-۲\sqrt[۳]{۹})^۳=-۷۲$$

۲۶۱. ابتدا دو عدد مربع کامل می‌یابیم که عدد ۱۳ بین آن دو عدد باشد، سپس از طرفین جذر می‌گیریم:

$$۹<۱۳<۱۶ \xrightarrow{\text{جذر}} ۳<\sqrt{۱۳}<۴$$

۲۶۲. مانند پاسخ سؤال قبل عمل می‌کنیم:

$$۴۹<۵۷<۶۴ \xrightarrow{\text{جذر}} ۷<\sqrt{۵۷}<۸$$

۲۶۳. ابتدا مشخص می‌کنیم $\sqrt{۳۰}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد و سپس طرفین را در یک منفی ضرب می‌کنیم. در این حالت جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$۲۵<۳۰<۳۶ \xrightarrow{\text{جذر}} ۵<\sqrt{۳۰}<۶$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۶<-\sqrt{۳۰}<-۵$$

۲۶۴. باید ببینیم عدد -۱۹ بین کدام دو عدد صحیح و مکعب کامل قرار دارد و سپس از طرفین فرجهٔ ۳ بگیریم:

$$-۲۷<-۱۹<-۸ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} -۳<\sqrt[۳]{-۱۹}<-۲$$

۲۶۵. می‌دانیم $۴^۳=۶۴$ و $۵^۳=۱۲۵$، پس:

$$۶۴<۱۰۰<۱۲۵ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} ۴<\sqrt[۳]{۱۰۰}<۵$$

۲۶۶. می‌دانیم $۳^۴=۸۱$ و $۴^۴=۲۵۶$، پس:

$$۳^۴<۱۴۵<۴^۴ \xrightarrow{\sqrt[۴]{\ }} ۳<\sqrt[۴]{۱۴۵}<۴$$

۲۶۷. می‌دانیم $۲^۵=۳۲$ و $۳^۵=۲۴۳$، پس:

$$۲^۵<۲۰۱<۳^۵ \xrightarrow{\sqrt[۵]{\ }} ۲<\sqrt[۵]{۲۰۱}<۳$$

۲۶۸. می‌دانیم $۳^۵=۲۴۳$ و $۴^۵=۱۰۲۴$، پس:

$$۳^۵<۵۰۰<۴^۵ \xrightarrow{\times(-۱)} -۴^۵<-۵۰۰<-۳^۵$$

$$\xrightarrow{\sqrt[۵]{\ }} -۴<\sqrt[۵]{-۵۰۰}<-۳$$

۲۶۹.

$$\pm\sqrt{۱۶}=\pm۴$$

۲۷۰.

$$\pm\sqrt[۴]{۶۲۵}=\pm۵$$

۲۷۱.

$$\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$$

۲۷۲.

$$\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

۲۷۳.

$$\pm\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}=\pm\sqrt[۶]{۱۰^{-۶}}=\pm۱۰^{-۱}=\pm۰/۱$$

۲۷۴. اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند؛ پس -۳۶ ریشهٔ دوم ندارد.

۲۷۵.

$$\pm\sqrt[۴]{۷۰}$$

۲۷۶.

$$\sqrt[۳]{-۵۰}$$

۲۷۷.

$$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲}=\sqrt[۵]{-\frac{۳۲}{۱۰۰۰۰۰}}=\sqrt[۵]{-\frac{۲^۵}{۱۰^۵}}=-۰/۲$$

۲۷۸.

$$\sqrt[۷]{-\frac{۱}{۱۲۸}}=\sqrt[۷]{-\frac{۱}{۲^۷}}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۷۹.

$$\sqrt{۳/۶۱}=\sqrt{(۱/۹)^۲}=۱/۹$$

۲۸۰.

$$\sqrt[۳]{۳۴۳}=\sqrt[۳]{۷^۳}=۷$$

۲۸۱.

$$\sqrt[۴]{۰/۰۰۱۶}=\sqrt[۴]{\frac{۱۶}{۱۰۰۰۰}}=\sqrt[۴]{\frac{۲^۴}{۱۰^۴}}=\sqrt[۴]{(\frac{۲}{۱۰})^۴}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$$

۲۸۲.

$$\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۱۰۲۴}}=\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۴^۵}}=\sqrt[۵]{(-\frac{۱}{۴})^۵}=-\frac{۱}{۴}$$

۲۸۳.

$$\sqrt[۶]{\frac{۶۴}{۷۲۹}}=\sqrt[۶]{\frac{۲^۶}{۳^۶}}=\sqrt[۶]{(\frac{۲}{۳})^۶}=\frac{۲}{۳}$$

۲۸۴.

$$\sqrt[۷]{-۱۲۸}=\sqrt[۷]{-۲^۷}=\sqrt[۷]{(-۲)^۷}=-۲$$

۲۸۵.

$$\sqrt[۷]{-۱}=-۱$$

۲۸۶.

$$\sqrt[۸]{۰}=۰$$

۲۸۷.

$$\sqrt[۴]{۱۶}=a \Rightarrow ۲=a \Rightarrow a^۳+۱=۲^۳+۱=۹$$

۲۸۸.

$$\sqrt[۳]{۷}=a \xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۷=a^۳ \Rightarrow a^۳+۳=۷+۳=۱۰$$

۲۸۹.

$$\sqrt[۵]{۴}=a \xrightarrow{\text{به توان ۵}} ۴=a^۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۶=a^{۱۰}$$

$$\Rightarrow a^{۱۰}-۵=۱۶-۵=۱۱$$

۲۹۰.

$$\sqrt[۶]{a}=۲ \xrightarrow{\text{به توان ۶}} a=۲^۶=۶۴ \Rightarrow \sqrt[۳]{-a}=\sqrt[۳]{-۶۴}$$

$$=\sqrt[۳]{(-۴)^۳}=-۴$$

۲۹۱. فرض کنیم طول ضلع مکعب میانی برابر a باشد، پس حجم آن برابر $a^۳$ خواهد بود. طبق فرض می‌توان نوشت: $۱۲۵<a^۳<۲۱۶$

از طرفین نامعادله، ریشهٔ سوم می‌گیریم: $۵<a<۶ \Rightarrow a\in(۵,۶)$

۲۹۲.

$$۶<\sqrt{x}<۷ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳۶<x<۴۹$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{۳۷,۳۸,\dots,۴۸\}$$

۲۹۳.

$$۴\le\sqrt[۳]{x}<۵ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۶۴\le x<۱۲۵$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{۶۴,۶۵,۶۶,\dots,۱۲۴\}$$

۲۹۴. $۲ \le \sqrt[۴]{x} \le ۳ \xrightarrow{\text{به توان ۴}} ۱۶ \le x \le ۸۱$

$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x \in \{۱۶,۱۷,\dots,۸۱\}$

۲۹۵. الف) وقتی $۰ < a < ۱$ باشد، با بزرگ‌شدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس: $a^۴ \boxed{>} a^۵$

ب) وقتی $۰ < a < ۱$ باشد، با بزرگ‌شدن فرجه، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس: $\sqrt{a} \boxed{<} \sqrt[۳]{a}$

۲۹۶. الف) وقتی $a > ۱$ باشد، با بزرگ‌ترشدن، توان عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود، پس: $a^۳ \boxed{<} a^۴$

ب) وقتی $a > ۱$ باشد، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود، پس: $\sqrt[۶]{a} \boxed{<} \sqrt[۵]{a}$

۲۹۷. الف) وقتی $-۱ < a < ۰$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود، پس: $a^۵ \boxed{<} a^۷$

ب) وقتی $-۱ < a < ۰$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس: $a^۴ \boxed{>} a^۶$

پ) وقتی $-۱ < a < ۰$، پس a عددی منفی است، لذا $a^۳ < ۰$ و $a^۴ > ۰$ و در نتیجه: $a^۳ \boxed{<} a^۴$

ت) وقتی $-۱ < a < ۰$، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس: $\sqrt[۳]{a} \boxed{>} \sqrt[۵]{a}$

۲۹۸. الف) وقتی $a < -۱$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود؛ پس: $a^۳ \boxed{>} a^۵$

ب) وقتی $a < -۱$، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود؛ پس: $\sqrt[۵]{a} \boxed{<} \sqrt[۷]{a}$

پ) وقتی $a < -۱$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. پس: $a^۲ \boxed{<} a^۴$

ت) چون $a < -۱$، پس $a^۷ < ۰$ و $a^۴ > ۰$ است و لذا داریم: $a^۷ \boxed{<} a^۴$

۲۹۹. می‌دانیم اگر $a > ۱$، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. داریم: $۱۱ > ۱ \Rightarrow ۱۱^۵ < ۱۱^۸$

۳۰۰. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت: $۰ < ۰/۲ < ۱ \Rightarrow (۰/۲)^۴ > (۰/۲)^۷$

۳۰۱. می‌دانیم اگر $-۱ < a < ۰$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین داریم:

$-۱ < -۰/۱ < ۰ \Rightarrow (-۰/۱)^۷ < (-۰/۱)^۹$

۳۰۲. می‌دانیم اگر $a < -۱$، آن‌گاه با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. داریم: $-۳ < -۱ \Rightarrow (-۳)^۳ > (-۳)^۵$

۳۰۳. می‌دانیم اگر $a < -۱$، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. داریم: $-۱۲ < -۱ \Rightarrow (-۱۲)^۴ < (-۱۲)^۶$

۳۰۴. می‌توان نوشت: $۰/۱ = \sqrt[۵]{(۰/۱)^۵} = \sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}$، پس:

$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = ۰/۱$.

۳۰۵. می‌دانیم اگر $a > ۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه عدد کوچک‌تر می‌شود. چون $۷ > ۱$ است، پس: $\sqrt[۵]{۷} > \sqrt[۹]{۷}$

۳۰۶. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. چون $۰ < \frac{۲}{۳} < ۱$؛ پس: $\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}} < \sqrt[۶]{\frac{۲}{۳}}$

۳۰۷. می‌دانیم اگر $-۱ < a < ۰$، آن‌گاه فقط با فرجهٔ فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. چون $-۱ < -۰/۳ < ۰$، پس: $\sqrt[۳]{-۰/۳} > \sqrt[۵]{-۰/۳}$

۳۰۸. می‌دانیم اگر $a < -۱$ باشد، آن‌گاه فقط فرجه‌های فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. چون $-۹ < -۱$، پس:

$\sqrt[۵]{-۹} < \sqrt[۹]{-۹}$

۳۰۹. در دو حالت، عدد a از ریشه‌های بامعنی خود کوچک‌تر است، یکی این‌که $۰ < a < ۱$ و دیگر این‌که $a < -۱$.

در این‌جا طبق فرض a عددی مثبت است، پس برای آن‌که $a < \sqrt[۳]{a}$ باشد، می‌بایست $۰ < a < ۱$.

۳۱۰. اگر $a > ۱$ یا $-۱ < a < ۰$ باشد، آن‌گاه عدد a از ریشه‌های بامعنی خود بزرگ‌تر خواهد بود؛ پس برای آن‌که $\sqrt[۵]{a} < a$ باشد، می‌بایست $a > ۱$ یا این‌که $-۱ < a < ۰$.

۳۱۱. گفتیم اگر $۰ < a < ۱$ یا $a < -۱$، آن‌گاه عدد a از تمام ریشه‌های بامعنی خودش کوچک‌تر است. طبق فرض a عددی منفی است. بنابراین برای آن‌که نامعادلهٔ $a < \sqrt[۷]{a}$ برقرار باشد، لازم است $a < -۱$.

۳۱۲. اعدادی که ریشهٔ سوم آن‌ها با خود آن‌ها برابر است، عبارت‌اند از ۱، صفر و ۱−.

۳۱۳. بنا بر توضیحات سؤالات قبل، اگر $a > ۱$ باشد آن‌گاه $a > \sqrt{a}$.

۳۱۴. می‌دانیم اگر $a > ۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر: $a > ۱ \Rightarrow a > \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۴]{a} > \sqrt[۵]{a}$

بنابراین در این‌جا که $a > ۱$ روی محور بالا قرار دارد، معلوم می‌شود که $n = \sqrt[۵]{a}$، $p = \sqrt[۴]{a}$ و $q = \sqrt[۳]{a}$ و چون هر عدد مثبت دو ریشهٔ زوج و قرینه دارد، پس $m = -\sqrt[۴]{a}$.

۳۱۵. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. به عبارت دیگر: $۰ < a < ۱ \Rightarrow a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۵]{a}$

بنابراین در این‌جا چون $۰ < a < ۱$ روی محور بالا قرار دارد، داریم:

$n = \sqrt[۳]{a}\,, p = \sqrt[۴]{a}\,, q = \sqrt[۵]{a}\,, m = -\sqrt[۴]{a}$

۳۱۶. می‌دانیم اگر $-۱ < a < ۰$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. البته چون a منفی است، فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود، به عبارت دیگر: $-۱ < a < ۰ \Rightarrow a > \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۵]{a}$

بنابراین با توجه به شکل داریم: $m = \sqrt[۵]{a}$ و $n = \sqrt[۳]{a}$

۳۱۷. می‌دانیم اگر $a < -۱$، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد بزرگ‌تر می‌شود. البته فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود. به عبارت دیگر:

$a < -۱ \Rightarrow a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a}$

بنابراین با توجه به شکل، داریم: $m = \sqrt[۳]{a}\,, n = \sqrt[۵]{a}$

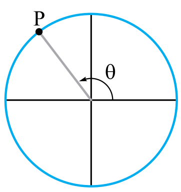
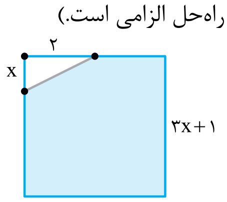
۳۱۸. عدد مطلوب را x می‌گیریم. طبق فرض می‌توان نوشت:

$\sqrt[۵]{x} = \sqrt[۳]{-۶۴} + ۶ \Rightarrow \sqrt[۵]{x} = -۴ + ۶ \Rightarrow \sqrt[۵]{x} = ۲$

$\xrightarrow{\text{به توان ۵}} x = ۲^۵ = ۳۲$

۱۷	نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. الف) شدت بارندگی (کم، زیاد، متوسط) ب) تعداد ماشین‌های یک پارکینگ پ) نوع آلایندگی هوا	۰/۷۵
	«موفق باشید» جمع نمرات	۲۰

امتحان نوبت دوم (پایان‌سال): ریاضی (۱)	رشته: ریاضی و فیزیک ـ علوم تجربی	تاریخ امتحان: خردادماه	
ردیف / امتحان شمارهٔ ۶	پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $B - A = A'$. ب) اگر n و k دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$. پ) در پرتاب ۶ سکه، احتمال این‌که همهٔ سکه‌ها مثل هم ظاهر شوند $\frac{۱}{۳۲}$ است.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع طول و عرض پایین‌ترین نقطهٔ سهمی $y = ۲x^۲ - ۸x + ۵$ برابر .... است. ب) اگر تابع f همانی باشد و $f(f(x)) + f(۴) = ۳$، آن‌گاه مقدار x برابر .... است. پ) متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز می‌تواند اختیار کند متغیر .... است.	۰/۷۵
۳	گزینهٔ درست را انتخاب کنید.  الف) اگر نقطهٔ $P(x, -۲x)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟ ۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ب) حاصل $\binom{۱۰}{۷} + \binom{۱۰}{۶}$ کدام است؟ ۱) $\binom{۱۱}{۷}$ ۲) $\binom{۱۰}{۸}$ ۳) $\binom{۱۱}{۶}$ ۴) $\binom{۲۰}{۱۳}$	۰/۵
۴	الف) در یک الگوی خطی جملهٔ سوم و سیزدهم به ترتیب ۴- و ۱۶ هستند. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید. ب) جملهٔ پنجم یک دنبالهٔ هندسی برابر ۲ است. حاصل‌ضرب ۹ جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.	۱/۷۵
۵	الف) اگر $A = ۳\sin x - ۲$، حداقل و حداکثر A را تعیین کنید. ب) اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۶	کسر $A = \frac{\sqrt{\sqrt{x-۱}+۱} \times \sqrt[۴]{x - ۲\sqrt{x-۱}}}{\sqrt{x-۲}}$ را ساده کنید. $(x > ۲)$	۱/۲۵
۷	اگر $a = \sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲} + ۱$ باشد، حاصل $(\frac{۳}{a} - ۱)^۳$ را به دست آورید.	۱
۸	در مربع شکل مقابل، مساحت قسمت سایه‌زده ۱۵ سانتی‌متر مربع است، مقدار x را به دست آورید. (نوشتن راه‌حل الزامی است.)  	۱/۲۵
۹	حدود m را طوری به دست آورید که نمودار سهمی $y = \frac{۱}{۴}x^۲ + (m-۱)x + m - ۱$ همواره بالای محور xها باشد.	۲

۱۰	الف) اگر $f=\begin{cases} x^{۲}+۳x & x\leq ۱ \\ ۲x+m & x\geq ۱\end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید. ب) مقدار $f(f(-۴))$ را به دست آورید.	۱
۱۱	طول مستطیلی از نصف عرض آن ۲ واحد بیشتر است، تابعی بنویسید که قطر مستطیل را برحسب طول آن بیان کند.	۱
۱۲	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & -۲\leq x<۰ \\ ۳ & ۰\leq x<۱ \\ ۳-x & x\geq ۱\end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۳	چند عدد طبیعی سه‌رقمی با ارقام متمایز و بزرگ‌تر از ۴۲۶ می‌توان نوشت؟	۱/۵
۱۴	الف) مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸\}$، چند زیرمجموعهٔ ۳ یا ۴ عضوی دارد که شامل عدد ۲ و ۳ باشد ولی شامل عدد ۷ نباشد؟ ب) با اعداد مجموعهٔ A چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟	۱/۲۵
۱۵	خانواده‌ای سه فرزند دارد. الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید. ب) احتمال این‌که فرزند دوم فقط یک برادر داشته باشد، را به دست آورید.	۱
۱۶	مهین، سارا و ۵ نفر دیگر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بنشینند. چه‌قدر احتمال دارد که دقیقاً دو نفر بین مهین و سارا قرار بگیرند؟	۱/۲۵
۱۷	الف) مرحلهٔ اول و چهارم علم آمار را به ترتیب نام ببرید. ب) نوع متغیر «مدرک تحصیلی افراد» را مشخص کنید.	۰/۷۵
	«موفق باشید» **جمع نمرات**	۲۰